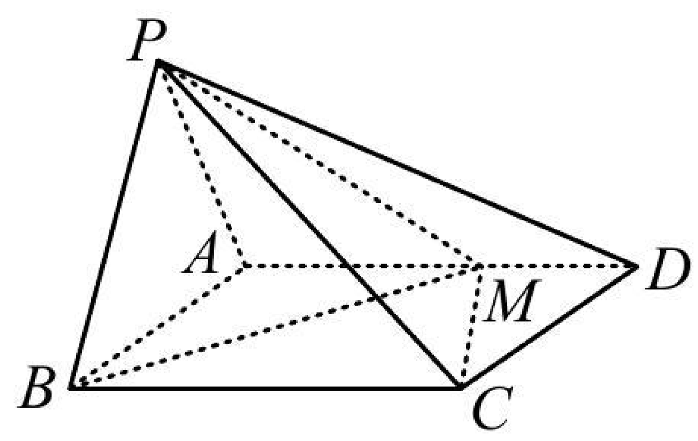
第 3 节 空间向量的应用：求距离（★★★）

强化训练

1．（2023·山西模拟·★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA=PB=\sqrt{5}$，$AB=2$，$AD=3$，M 是棱 AD 上一点，且 $AM=2MD$.

（1）求点 B 到直线 PM 的距离；

（2）求平面 PMB 与平面 PMC 的夹角余弦值.



解：（1）（条件中有平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，先找与交线 AB 垂直的直线，构造线面垂直，便于建系处理）

取 AB 中点 O，连接 OP，因为 $PA=PB=\sqrt{5}$，$AB=2$，所以 $OP\perp AB$，且 $OA=OB=1$，

故 $OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=2$，因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$OP\subset$ 平面 PAB，$OP\perp AB$，所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$，

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$P(0,0,2)$，

因为 $AM=2MD$，$AD=3$，所以 $AM=2$，故 $M(-1,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{PM}=(-1,2,-2)$，

（计算点到直线距离的向量公式中有直线的单位方向向量，故先求它）

直线 PM 的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})$，

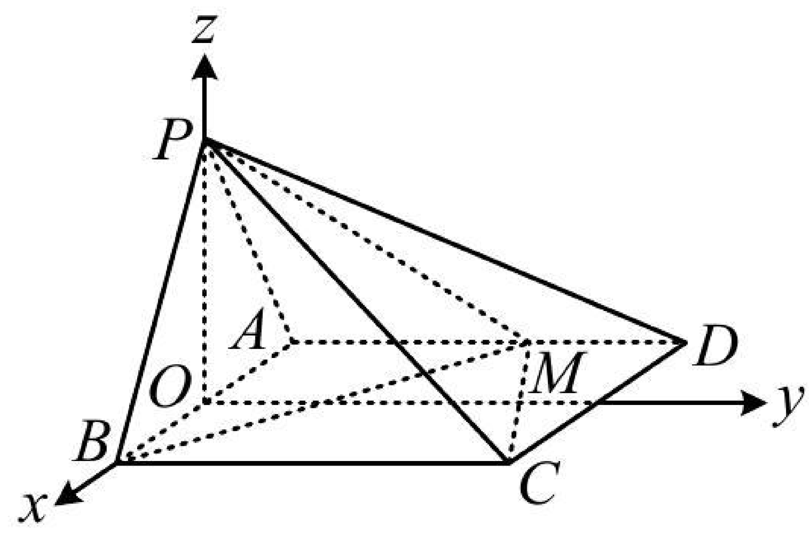
由内容提要第 1 点的公式，点 B 到直线 PM 的距离 $d=\sqrt{\overrightarrow{BP}^2-(\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{5-(-1)^2}=2$.

（2）$C(1,3,0)$，所以 $\overrightarrow{MC}=(2,1,0)$，设平面 PMB，PMC 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+2z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PM}=-x_1+2y_1-2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$，则 $\begin{cases}y_1=2\\ z_1=1\end{cases}$，所以平面 PMB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=-x_2+2y_2-2z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=2x_2+y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=2$，则 $\begin{cases}y_2=-4\\ z_2=-5\end{cases}$，所以平面 PMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-5)$，

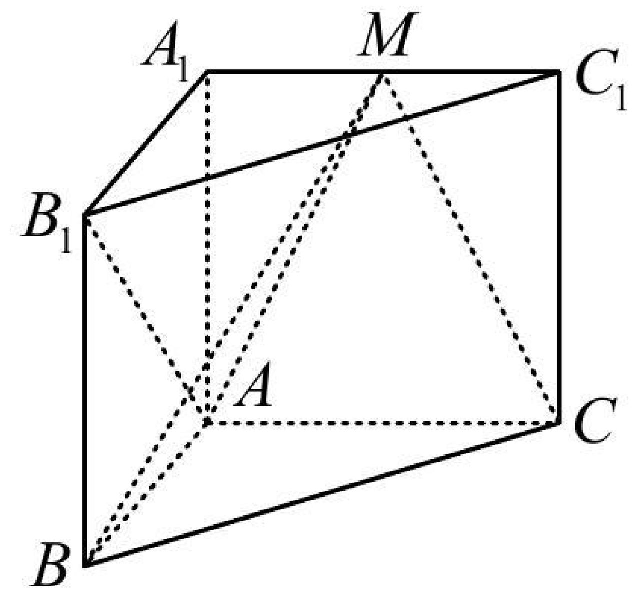
从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故平面 PMB 与平面 PMC 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



2．（2022·山东滕州模拟·★★★）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=1$，M 为线段 A_1C_1 上一点.

（1）求证：$BM\perp AB_1$；

（2）若直线 AB_1 与平面 BCM 所成的角为 45°，求点 A_1 到平面 BCM 的距离.



解：（1）（图中有 3 条两两垂直的直线，可直接建系证明）以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B_1(1,0,1)$，$B(1,0,0)$，因为 M 在线段 A_1C_1 上运动，所以可设 $M(0,a,1)$，其中 $0\le a\le 1$，

从而 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,a,1)$，故 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BM}=1\times(-1)+0\times a+1\times 1=0$，所以 $BM\perp AB_1$.

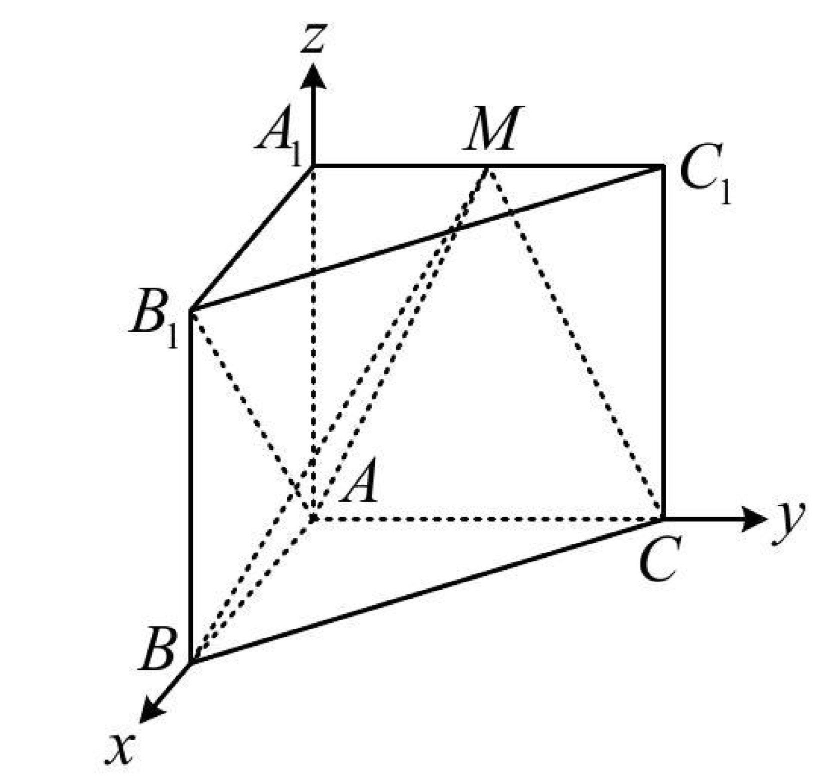
（2）（给出了 AB_1 与平面 BCM 所成的角，可由向量法求出该线面角的余弦值，从而建立方程，求得 M 的坐标）

由图可知 $C(0,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，设平面 BCM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-x+ay+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=1\\ z=1-a\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1-a)$ 是平面 BCM 的一个法向量，

因为 AB_1 与平面 BCM 所成的角为 45°，所以 $\left|\cos<\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+(1-a)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$，

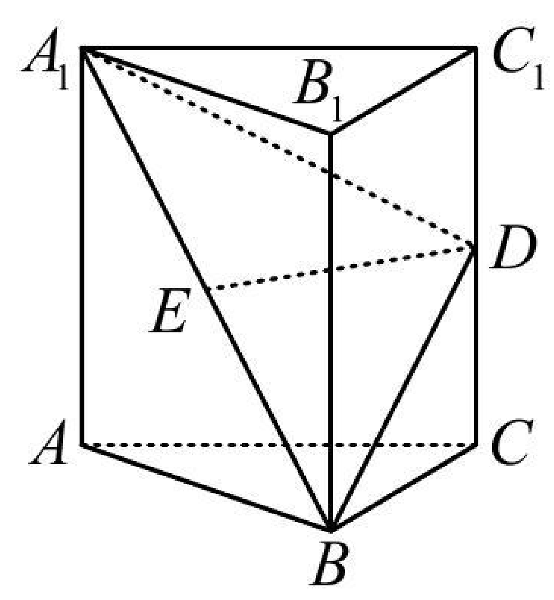
所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\dfrac{1}{2})$，又 $A_1(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，故点 A_1 到平面 BCM 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{3}$.



3.（2023·陕西乾县模拟改·★★★）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=AA_1$，D，E 分别为 CC_1，A_1B 的中点.

（1）证明：$DE\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $\angle ACB=90^{\circ}$，$AB=2$，求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.



解：（1）（要证结论成立，需证 $DE\perp$ 面 ABB_1A_1 内的两条相交直线，分析易知 $A_1D=BD$，故其中一条可选 A_1B）

设 $AC=BC=AA_1=2a$，则 $CD=C_1D=a$，$A_1D=\sqrt{A_1C_1^2+C_1D^2}=\sqrt{5}a$，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{5}a$，

所以 $A_1D=BD$，结合 E 为 A_1B 中点得 $DE\perp A_1B$ ①，

（另一条选谁呢？AB 和 AA_1 均可，不妨选 AB. 由三垂线定理，只需证 $AB\perp DE$ 在面 ABC 内的射影，故先作射影，可发现 E 在面 ABC 内的射影是 AB 中点 F）

取 AB 中点 F，连接 EF，CF，则 $EF\parallel AA_1$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}AA_1$，

又 D 为 CC_1 的中点，所以 $CD\parallel AA_1$ 且 $CD=\dfrac{1}{2}AA_1$，故 $EF\parallel CD$ 且 $EF=CD$，所以 $CDEF$ 是平行四边形，

故 $DE\parallel CF$，因为 $AC=BC$，所以 $AB\perp CF$，结合 $DE\parallel CF$ 可得 $AB\perp DE$ ②，

由①②以及 A_1B，AB 是平面 ABB_1A_1 内的相交直线可得 $DE\perp$ 平面 ABB_1A_1.

（2）（算点到平面的距离，建系，用内容提要第 2 点的公式计算即可）建立如图所示的空间直角坐标系，

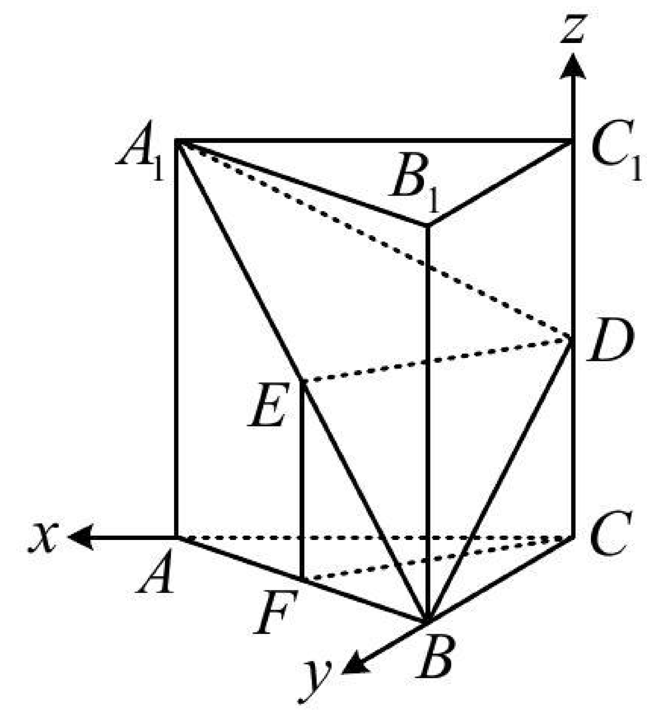
由 $AB=2$，$AC=BC$，$\angle ACB=90^{\circ}$ 可得 $AC=BC=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=\sqrt{2}$，

故 $B_1(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$A_1(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $\begin{cases}x=-1\\ z=2\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量，

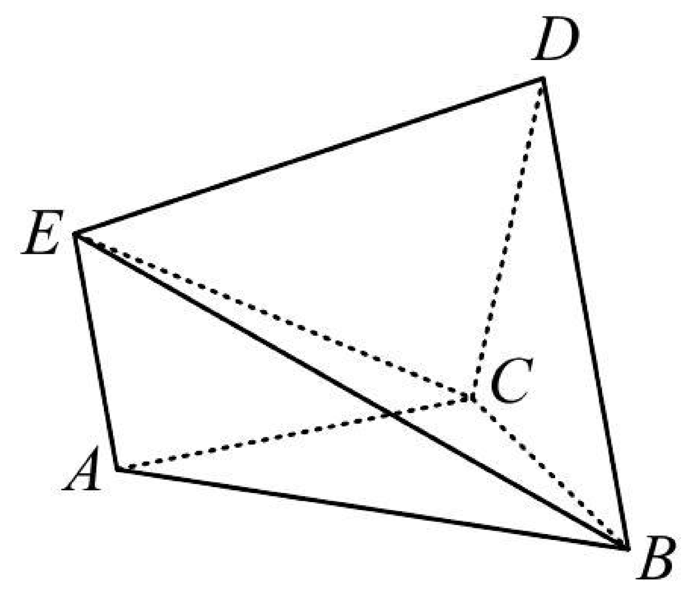
故点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



4．（2023·四川泸县模拟·★★★★）如图，在多面体 $ABCDE$ 中，ΔABC，ΔBCD，ΔCDE 都是边长为 2 的正三角形，平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $CDE\perp$平面 BCD.

（1）求证：$AE// BD$；

（2）求点 B 到平面 ACE 的距离.



解：（1）（有两个面面垂直，想到作交线的垂线构造线面垂直，作出来就发现有平行四边形）

如图，取 BC 中点 G，CD 中点 F，连接 EF，FG，AG，因为ΔABC，ΔCDE 是边长为 2 的正三角形，

所以 $AG=EF=\sqrt{3}$，且 $AG\perp BC$，$EF\perp CD$，又平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$，

$AG\subset$平面 ABC，所以 $AG\perp$平面 BCD，同理，由平面 $CDE\perp$平面 BCD 可得 $EF\perp$平面 BCD，

所以 $EF// AG$ 且 $EF=AG$，从而四边形 $AEFG$ 是平行四边形，故 $AE// FG$，又 $FG// BD$，所以 $AE// BD$.

（2）连接 DG，则 $DG\perp BC$，结合平面 $ABC\perp$平面 BCD 可得 $DG\perp$平面 ABC，所以 AG，GB，GD 两两垂直，

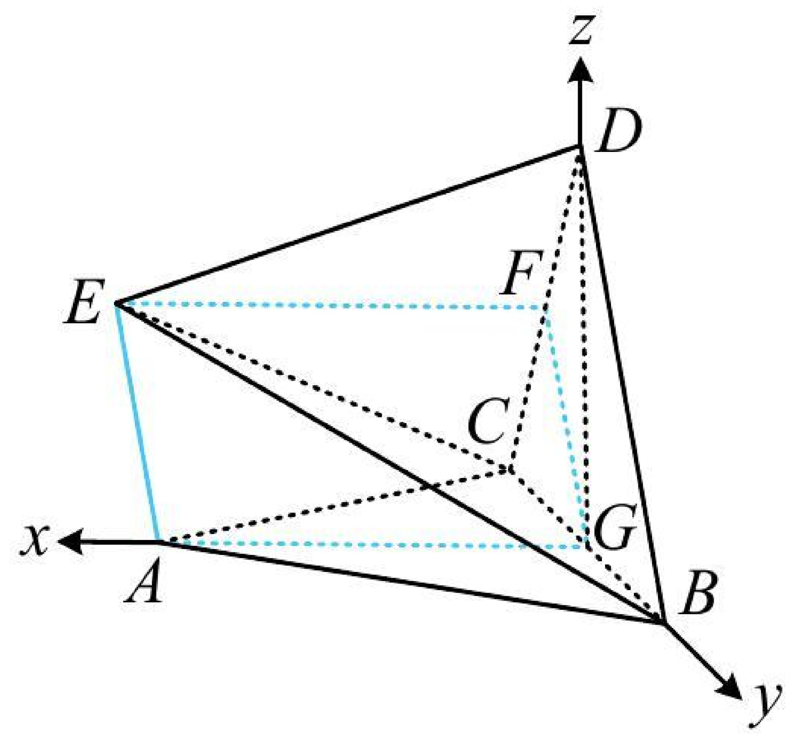
以 G 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,1,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,-1,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$，（求平面 ACE 的法向量还需 $\overrightarrow{AE}$ 或 $\overrightarrow{CE}$，不妨用 $\overrightarrow{AE}$，若写 E 的坐标，就得找它在面 ABC 内的投影，较为麻烦，可借助平行关系将 $\overrightarrow{AE}$ 转化为好算的向量来求，如 $\overrightarrow{BD}$）

由（1）可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(0,-1,\sqrt{3})=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=\sqrt{3}x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}\\ z=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$ 是平面 ACE 的一个法向量，

故点 B 到平面 ACE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.



【反思】在求向量坐标时，若遇到某些点的坐标不好找，不妨考虑借助平行关系转化为好求的向量来算.